

4. VALORI CENTRALI

Prof. Maurizio Pertichetti

4. VALORI CENTRALI

Si è detto che una distribuzione di frequenze può essere rappresentata in forma tabellare o grafica (od anche analitica), tuttavia in diversi casi può essere utile fornire una efficace rappresentazione del fenomeno nella sua globalità e riassumerne le caratteristiche più importanti utilizzando uno o più valori. Questi valori caratteristici assumono il nome di **valori centrali** (o di **tendenza centrale**) e di **valori di disuguaglianza**. I primi si usano quindi quando si vuole sintetizzare la distribuzione di frequenza con un unico valore, che di fatto viene a rappresentare il valore intorno al quale si addensa la popolazione ed è in grado di dare una descrizione dell'ordine di grandezza del fenomeno e confrontarlo con altri, i secondi, come vedremo, ci danno invece informazione su quanto sono diversi i valori della distribuzione relativamente alle modalità.

I valori centrali vengono articolati secondo due tipologie:

- **valori centrali analitici** (o sintetici), che si ottengono effettuando operazioni algebriche su tutti i valori della distribuzione di un carattere quantitativo. Tra questi vi sono la media aritmetica, la media geometrica, la media armonica, la media quadratica;
- **valori centrali non analitici**, la cui determinazione coinvolge le frequenze o solo alcuni valori della distribuzione. Tra questi vi sono la mediana e la moda.

In questo corso saranno trattate la media aritmetica, la mediana e la moda.

La media aritmetica

La **media aritmetica**, spesso indicata semplicemente come valore medio, può essere usata unicamente per le distribuzioni di caratteri quantitativi. Per la sua immediata intuizione, per le proprietà di cui gode e per la facilità del calcolo, è la più utilizzata fra le espressioni sintetiche della grandezza di una serie di dati.

Il concetto di media aritmetica è assai semplice. E' infatti il valore medio risultante dal quoziente tra la somma di tutti i valori, o modalità, di una distribuzione e il numero di questi valori.

Dati i valori o modalità, tra loro diversi, $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k$ di una distribuzione, la media μ si ottiene dalla seguente formula:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$$

Se i valori della distribuzione si ripetono, ovvero se le modalità si presentano avendo associate le frequenze $n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k$, la media μ è rappresentata dal quoziente che si ottiene facendo la somma dei prodotti di ciascun valore per la sua frequenza e dividendola per la somma di tutte le frequenze:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{\sum_{i=1}^k n_i = n}$$

La media aritmetica μ è quel valore che sostituito a ciascuno dei valori della distribuzione, non ne altera la somma, ovvero produce lo stesso risultato:

$$\sum_{i=1}^k x_i = \mu k$$

La media aritmetica costituisce il baricentro della distribuzione di frequenza ed è sempre compresa tra i valori minimo e massimo della distribuzione, ovvero $x_1 \leq \mu \leq x_k$, e può coincidere con uno o più di essi o con nessuno di essi.

Alcune proprietà della media aritmetica:

- la somma algebrica degli scarti di ciascun termine di una distribuzione dalla propria media aritmetica è nulla:

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \mu) n_i = 0$$

- la somma dei quadrati degli scarti tra ciascun termine della successione e la propria media aritmetica è un minimo, ovvero è inferiore alla somma dei quadrati degli scarti da qualsiasi altro valore diverso dalla media aritmetica:

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 = \text{minimo}$$

In presenza di una variabile statistica divisa in intervalli, il metodo più semplice di calcolo della media aritmetica, anche se evidentemente introduce un errore di approssimazione, consiste nel sostituire le classi di intensità con il valore centrale di ciascuna di esse.

Inconveniente della media aritmetica è la sua scarsissima resistenza ai valori eccezionali, nel senso che, anche un valore atipico può farla variare in misura elevatissima, sino a farla perdere significato. In pratica, la media aritmetica fornisce una utile sintesi quando la variabilità delle osservazioni non è elevata.

x_1	12	12	12	12
x_2	15	15	15	15
x_3	19	19	19	19
x_4	23	23	23	23
x_5	28	50	100	200
tot	97	119	169	269
k	5	5	5	5
μ	19,4	23,8	33,8	53,8

Esempi di calcolo della media aritmetica

Data la seguente distribuzione di valori:

12 15 19 23 28

$$\mu = \frac{12 + 15 + 19 + 23 + 28}{5} = \frac{97}{5} = 19,4$$

In questo caso si dimostra che la media aritmetica è quella quantità μ che sostituita a ciascuna modalità, non ne altera la somma. In formula:

$$\sum_{i=1}^k x_i = \mu k \quad (\quad 19,4 + 19,4 + 19,4 + 19,4 + 19,4 = 97 \quad)$$

(5 volte)

Data la seguente distribuzione di frequenza:

n. componenti	n. famiglie
1	153
2	225
3	335
4	564
5	346
6	133
7	75
8	49
Totale	1880

x_i	n_i	$x_i n_i$
1	153	153
2	225	450
3	335	1.005
4	564	2.256
5	346	1.730
6	133	798
7	75	525
8	49	392
Totale	1.880	7.309

$$\mu = \frac{7.309}{1.880} = 3,89$$

Data la seguente distribuzione di frequenza per classi di età:

classi di età	componenti
4 — 14	115
15 — 25	156
26 — 40	130
41 — 55	110
56 — 70	90
71 — 85	38
Totale	639

x_i valore centrale	n_i	$x_i n_i$
9	115	1.035
20	156	3.120
33	130	4.290
48	110	5.280
63	90	5.670
78	38	2.964
Totale	639	22.359

$$\mu = \frac{22.359}{639} = 34,99$$

La mediana

La **mediana** è quell'indice di posizione, ovvero quel valore caratteristico determinato tenendo conto sia delle frequenze sia dell'ordine delle modalità, che risponde al concetto più intuitivo di valore medio, essendo la modalità posseduta dall'unità che occupa il **posto centrale** di una distribuzione ordinata in senso non decrescente. Essa bipartisce la distribuzione delle modalità di un carattere, per cui il numero dei termini che precedono la mediana è uguale al numero dei termini che la seguono.

La **mediana**, che può essere calcolata tanto per i caratteri qualitativi ordinati quanto per quelli quantitativi, è una misura robusta, in quanto poco influenzata dalla presenza di dati anomali. Altresì non è influenzata dalle osservazioni estreme.

Quando il numero delle osservazioni è dispari, la mediana è un termine effettivo in quanto corrisponde esattamente al valore che occupa la posizione centrale nella distribuzione, quando il numero delle osservazioni è pari la mediana è invece un valore di conto in quanto è data dalla semisomma dei due valori centrali.

Si distingue:

- per caratteri discreti:
 - con modalità ordinate se:
 - n* dispari la mediana è data dal valore corrispondente al posto centrale $C = n+1/2$. Per cui Me è uguale a **x** che corrisponde a C.
 - n* pari la mediana è data dal valore corrispondente alla semisomma dei due posti centrali $C1=n/2$ e $C2=(n/2)+1$. Per cui Me corrisponde a $(C1+C2)/2$

- per caratteri continui con modalità raggruppate in classi:
 - preliminarmente si deve individuare la classe mediana, che è quella che corrisponde alla modalità associata alla prima frequenza cumulata relativa superiore al 50 per cento.
 - successivamente per stabilire la mediana, ovvero quale valore scegliere all'interno dell'intervallo della classe, si applica la formula:

$$Me = L_{me} + \frac{\frac{n}{2} - \sum n_{iMe}}{f_{Me}} c$$

dove:

- L_{Me} è il confine inferiore della classe mediana;
- n è la frequenza totale;
- $\sum n_{iMe}$ è l'accumulo delle frequenze di tutte le classi inferiori alla classe mediana;
- f_{Me} è la frequenza della classe mediana;
- c è l'ampiezza della classe mediana.

Esempi di calcolo della mediana

Date le seguenti distribuzioni d'intensità:

a) 13, 13, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 22, 23, 23, 23, 26, 45

le osservazioni della distribuzione sono in numero dispari (15) per cui la mediana è quel valore di x che corrisponde alla posizione $(15 + 1)/2 = 8$. All'**8°** posto c'è la modalità **18** e quindi $Me=18$.

13 13 15 16 16 17 18 **18** 19 22 23 23 23 26 45
 1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° **8°** 9° 10° 11° 12° 13° 14° 15°
 (7 valori) (7 valori)

b) 13, 13, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 22, 23, 23, 23, 26, 26, 45

in questo caso le osservazioni della distribuzione sono in numero pari (16) per cui la mediana è quel valore dato dalla semisomma dei valori di x corrispondenti alle posizioni $16/2=8$ e $(16/2)+1=9$. All'**8°** e **9°** ci sono le modalità **18** e **19**, per cui $(18+19)/2 = 18,5$ e quindi $Me=18,5$.

13 13 15 16 16 17 18 **18 19** 22 23 23 23 26 26 45
 1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° **8° 9°** 10° 11° 12° 13° 14° 15° 16°
 (8 valori) (8 valori)

a)

x_i	n_i	n'_i
13	2	2
15	1	3
16	2	5
17	1	6
18	2	8
19	1	9
22	1	10
23	3	13
26	1	14
45	1	15
totale	15	

b)

x_i	n_i	n'_i
13	2	2
15	1	3
16	2	5
17	1	6
18	2	8
19	1	9
22	1	10
23	3	13
26	2	15
45	1	16
totale	16	

- a) **Me** = 18 in quanto è dato dal valore d'intensità in corrispondenza del quale le frequenze cumulate hanno appena superato la semisomma delle frequenze totali $n/2=7,5$.
- b) Poiché i posti centrali sono 8 e 9 e dalle frequenze cumulate si desume che si riferiscono alla modalità 18 e 19, **Me** = 18,5 .

Data la seguente distribuzione:

x_i	n_i
1	2
5	4
10	3
Totale	9

x_i	n_i	n'_i
1	2	2
5	4	6
10	3	9
Totale	9	

Poiché $n=9$ è dispari il posto centrale è $C=(9+1)/2=5$. La modalità che corrisponde al 5° posto è 5 in quanto è la prima modalità a cui corrisponde una frequenza cumulata superiore a $n/2=9/2=4,5$.

1 1 5 5 **5** 5 10 10 10
 1° 2° 3° 4° **5°** 6° 7° 8° 9°

Data la seguente distribuzione:

x_i	n_i
3	4
5	6
13	3
15	1
Totale	14

x_i	n_i	n'_i
3	4	4
5	6	10
13	3	13
15	1	14
Totale	14	

Poiché $n=14$ è pari, i posti centrali sono $C=14/2=7^0$ e $C=(14/2)+1=8^0$. Tali posizioni si riferiscono entrambi alla modalità 5 in quanto è la prima cui corrisponde una frequenza cumulata superiore a $n/2=14/2=7$.

3 3 3 3 5 5 **5 5** 5 5 13 13 13 15
 1° 2° 3° 4° 5° 6° **7° 8°** 9° 10° 11° 12° 13° 14°

Data la seguente distribuzione di frequenza per classi di età:

Classi di età	Partecipanti
0 — 13	22
14 — 44	65
45 — 64	80
65 ed oltre	40
Totale	207

n_i	n'_i
22	22
65	87
80	167
40	207
207	

La classe mediana è la classe 45-64, in quanto è la prima cui corrisponde una frequenza cumulata superiore a $n/2=207/2=103,5$.

posti | 22 | 65 | 80 | 40 |
 | 1~ ↔ 22^v | 23^v ↔ 87^v | 88^v ↔ 167^v | 168^v ↔ 207^v |
 c'è la classe 0-13 c'è la classe 14-44 c'è la classe 45-64 c'è la classe 65 e +
 | 88° **103,5** 167° |

$$Me = L_{me} + \frac{\frac{n}{2} - \sum n_{iMe}}{f_{Me}} c$$

dove:

- L_{me} il confine inferiore della classe mediana è 45;
- n la frequenza totale è 207;
- $\sum n_{iMe}$ l'accumulo delle frequenze di tutte le classi inferiori alla classe mediana è 87;
- f_{Me} la frequenza della classe mediana è 80;
- c l'ampiezza della classe mediana è 20.

$$Me = 45 + \frac{\frac{207}{2} - 87}{80} 20 = 49,13$$

La moda

La **moda**, detta anche valore normale, è la modalità del carattere cui corrisponde la frequenza assoluta o relativa più alta. Questo valore centrale può essere calcolato per qualsiasi carattere, inclusi quelli qualitativi con modalità non ordinate.

Ha significato di sintesi quando la distribuzione presenta una sola moda, ossia è **unimodale**. Ma può averne anche due, nel qual caso si dice **bimodale**, tre, **trimodale**, o più. Una distribuzione si dice zeromodale quando non presenta alcuna moda, ovvero tutti i termini hanno la stessa frequenza.

Non è influenzata dalla presenza di nessun valore estremo, tuttavia viene utilizzata prevalentemente a scopi descrittivi.

Per caratteri continui con modalità raggruppate in classi, analogamente a quanto visto per la mediana, prima si individua la classe modale, quindi per stabilire il valore si applica la formula:

$$Mo = L_{mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c$$

dove:

- L_{mo} è il confine inferiore della classe modale;
- Δ_1 è l'eccesso della frequenza modale sulla frequenza della classe immediatamente inferiore;
- Δ_2 è l'eccesso della frequenza modale sulla frequenza della classe immediatamente superiore;
- c è l'ampiezza della classe modale.

Esempi di calcolo della moda

Data la seguente distribuzione:

13, 13, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 22, 23, 23, 23, 26, 26, 45

x_i	n_i
13	2
15	1
16	2
17	1
18	2
19	1
22	1
23	3
26	2
45	1
	16

In questo caso la moda è $Mo = 23$, in quanto il dato 23 si presenta 3 volte. Ovvero ha la frequenza più alta di tutti gli altri.

Data la seguente distribuzione di frequenza per classi di età:

classi di età	iscritti
34 — 37	4
38 — 41	9
42 — 45	19
46 — 49	29
50 — 53	17
54 — 57	10
58 — 61	7
Totale	95

La **classe modale** è la quinta in quanto ad essa corrisponde la frequenza massima (29 iscritti). La moda è invece data da:

$$\begin{aligned}
 - L_{mo} &= 46 \\
 - \Delta_1 &= 10 \\
 - \Delta_2 &= 12 \\
 - c &= 4
 \end{aligned}
 \quad
 Mo = L_{mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c = 46 + \frac{10}{10 + 12} 4 = 47,82$$

Data la seguente distribuzione di frequenza per classi di età:

Classi addetti	Aziende
50 † 60	8
60 † 70	10
70 † 80	16
80 † 90	14
90 † 100	10
100 † 110	5
110 † 120	2
Totale	65

La classe modale in questo caso è la terza in quanto ha associata la frequenza massima (16 addetti). La moda è invece data da:

- $L_{mo} = 70$
- $\Delta_1 = 6$
- $\Delta_2 = 2$
- $c = 10$

$$Mo = L_{mo} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c = 70 + \frac{6}{6 + 2} 10 = 77,50$$