UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PERUGIA
DIPARTIMENTO DI FILOSOFIA SCIENZE SOCIALI UMANE E DELLA FORMAZIONE
Corso di Laurea in Scienze per l'Investigazione e la Sicurezza

7. RELAZIONE TRA CARATTERI

CONNESSIONE

Prof. Maurizio Pertichetti

Statistica sociale

7. RELAZIONE TRA CARATTERI 1

Come già anticipato, nell'analisi dei dati si è sempre più spesso interessati a comprendere se tra due o più caratteri, che si presentano congiuntamente sulle unità statistiche di una popolazione, vi possa essere un qualche legame e, nel caso, quale sia il grado di tale relazione. In questa sede limiteremo l'analisi alle relazioni tra due caratteri. In termini tecnici si parla di dipendenza logica tra due caratteri quando tra questi vi è conoscenza a priori dell'esistenza di una relazione di causa ed effetto.

Se due variabili sono logicamente dipendenti, si può pensare che esse siano anche statisticamente dipendenti, così che dalla conoscenza delle modalità di una di esse si possono costruire ipotesi sulle modalità dell'altra. Diversamente, si può affermare che vi è indipendenza logica quando tra i due caratteri non risulta nessuna relazione di causa ed effetto, fatto questo che di conseguenza induce a ritenere che esse siano anche statisticamente indipendenti. La dipendenza logica implica che vi sia una direzione nel legame tra i due caratteri, nel senso che se intervengono mutamenti in uno di essi, di conseguenza mutamenti si devono avere nell'altro. Come dire che nella relazione che presumibilmente li lega uno deve essere interpretato come l'antecedente logico e l'altro come il conseguente logico. Il legame in sostanza deve intendersi come unidirezionale e asimmetrico. Ciò premesso:

- quando l'indipendenza è studiata attraverso l'analisi delle sole frequenze di una distribuzione doppia si parla di **connessione** tra i due caratteri. E il grado di relazione fra le due variabili, in assenza di indipendenza, viene misurato con diversi indici statistici che, nel concreto, rappresentano la distanza tra la situazione effettivamente osservata e quella teorica riferita all'ipotesi di indipendenza. Gli indici in tal modo ottenuti per misurare tale legame associativo sono detti **indici di connessione**. E poiché sono ottenuti utilizzando la distribuzione delle frequenze e non le modalità, si deve sottolineare che essi sono gli unici indici calcolabili per misurare l'associazione tra caratteri qualitativi non ordinati;
- quando l'indipendenza è studiata attraverso l'analisi delle modalità assunte dai due caratteri si parla di **dipendenza funzionale** tra i due caratteri. E il grado di relazione fra le due variabili viene misurato mediante l'individuazione di una funzione analitica. Con il termine **regressione** si intende il modello atto a descrivere la relazione.

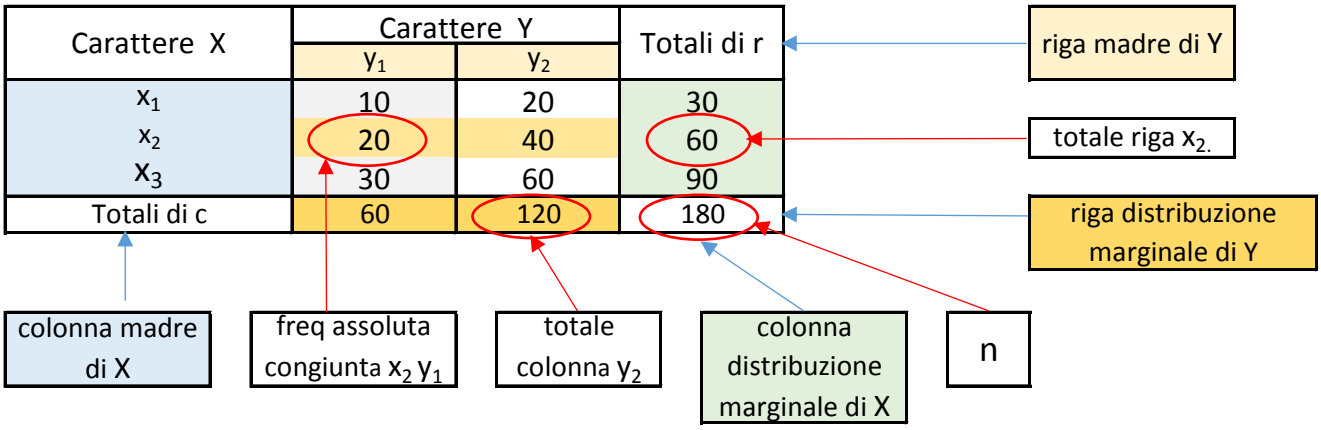
Oltre alla dipendenza tra caratteri, la teoria delle relazioni statistiche studia l'**interdipendenza**, ossia il legame reciproco tra due variabili, e il termine che sprime tale particolare relazione è quello di **correlazione**.

Indipendenza, dipendenza e interdipendenza in distribuzione

Riprendiamo la distribuzione doppia di frequenze e la corrispondente tabella a doppia entrata nella sua formulazione generale:

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_c	**Totali di riga**
x_1	n_{11}	n_{12}	⋯	n_{1j}	⋯	n_{1c}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	⋯	n_{2j}	⋯	n_{2c}	$n_{2.}$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋯	n_{ij}	⋯	n_{ic}	$n_{i.}$
…	…	…	…	…	…	…	…
x_r	n_{r1}	n_{r2}	⋯	n_{rj}	⋯	n_{rc}	$n_{r.}$
Totali di colonna	$n_{.1}$	$n_{.2}$	⋯	$n_{.j}$	⋯	$n_{.c}$	n

E riprendiamo quella riferita ad un caso concreto:



Occupati secondo i settori e la posizione professionale

Settori X	Posizione professionale Y		Totali di r
	Dipendenti Y_1	Autonomi Y_2	
Agricoltura X_1	10	20	30
Industria X_2	20	40	60
Altre attività X_3	30	60	90
Totali di c	60	120	180

	Dipendenti Y_1
Agricoltura X_1	10
Industria X_2	20
Altre attività X_3	30

distribuzione di X condizionata a y_1

	Dipendenti Y_1	Autonomi Y_2
Agricoltura X_1	10	20

distribuzione di Y condizionata a x_1

Si sa dalla teoria che una variabile Y si dice **indipendente** da una variabile X se la prima rimane costante al variare dei valori assunti dalla seconda. In caso contrario si dice che Y è **funzione** di X. L'assenza di una qualsiasi relazione tra due caratteri X e Y desumibili da una distribuzione doppia di frequenza è detta **indipendenza assoluta**, e si evince esaminando le distribuzioni condizionate.

Più precisamente, riprendendo la tabella precedente, riferita come esempio a due caratteri qualitativi:

Indipendenza di Y da X

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	10	20	30
x_2	20	40	60
x_3	30	60	90
Totali di c	60	120	180

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	0,333	0,667	1,000
x_2	0,333	0,667	1,000
x_3	0,333	0,667	1,000
Totali di c	0,333	0,667	1,000

il carattere Y si dirà indipendente dal carattere X se le frequenze relative delle distribuzioni condizionate di Y risultano uguali tra loro e uguali alle frequenze marginali relative, per cui al variare della modalità X la distribuzione relativa di Y è la medesima.

Indipendenza di X da Y

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	10	20	30
x_2	20	40	60
x_3	30	60	90
Totali di c	60	120	180

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	0,167	0,167	0,167
x_2	0,333	0,333	0,333
x_3	0,500	0,500	0,500
Totali di c	1,000	1,000	1,000

analogamente il carattere X si dirà indipendente dal carattere Y, se le frequenze relative delle distribuzioni condizionate di X risultano uguali tra loro e uguali alle frequenze marginali relative, per cui al variare della modalità Y la distribuzione relativa di X è la medesima.

Il **concetto di indipendenza è simmetrico** per cui, se il carattere Y è indipendente dal carattere X, allora vale anche la relazione contraria, ovvero anche il carattere X è indipendente dal carattere Y.

Pertanto due caratteri X e Y si diranno statisticamente indipendenti se sono verificate le uguaglianze:

$$\frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \frac{n_{.j}}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{n}$$

ovvero ricordando la tabella a doppia entrata nella sua formulazione generale:

	y_1	y_2	...	y_j	...	y_c	T rig
x_1	n_{11}	n_{12}	⋯	n_{1j}	⋯	n_{1c}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	⋯	n_{2j}	⋯	n_{2c}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋯	n_{ij}	⋯	n_{ic}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	⋯	n_{rj}	⋯	n_{rc}	$n_{r.}$
T col	$n_{.1}$	$n_{.2}$	⋯	$n_{.j}$	⋯	$n_{.c}$	n

	y_1	y_2	...	y_j	...	y_c	T rig
x_1	n_{11}	n_{12}	⋯	n_{1j}	⋯	n_{1c}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	⋯	n_{2j}	⋯	n_{2c}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	n_{i1}	n_{i2}	⋯	n_{ij}	⋯	n_{ic}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	n_{r1}	n_{r2}	⋯	n_{rj}	⋯	n_{rc}	$n_{r.}$
T col	$n_{.1}$	$n_{.2}$	⋯	$n_{.j}$	⋯	$n_{.c}$	n

da cui si ottengono le frequenze teoriche di indipendenza $n_{ij}' = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n}$

ovvero le frequenze che si dovrebbero avere nel caso di indipendenza assoluta tra i caratteri X e Y.

Come si può evincere la tabella utilizzata si riferisce a due caratteri tra loro indipendenti, in quanto per ognuna delle frequenze assolute congiunte vale la suddetta uguaglianza:

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	10	20	30
x_2	20	40	60
x_3	30	60	90
Totali di c	60	120	180

$$n_{11}' = \frac{n_{1.} \times n_{.1}}{n} = \frac{30 \times 60}{180} = 10$$

$$n_{32}' = \frac{n_{3.} \times n_{.2}}{n} = \frac{90 \times 120}{180} = 60$$

Per contro la mancata validità per le frequenze assolute congiunte dell'uguaglianza di cui sopra, implica l'esistenza di una situazione di dipendenza.

La **dipendenza perfetta** è naturalmente l'antitesi della indipendenza. In particolare:

- Il carattere Y dipende perfettamente dal carattere X se ad ogni modalità del carattere X è associata una ed una sola modalità del carattere Y, ovvero quando per ogni riga si ha un solo valore $n \neq 0$:

Carattere X	Carattere Y		Totali di r
	y_1	y_2	
x_1	0	20	20
x_2	20	0	20
x_3	0	60	60
Totali di c	20	80	100

tale relazione di dipendenza non è biunivoca.

- Il carattere X dipende perfettamente dal carattere Y se ad ogni modalità del carattere Y è associata una ed una sola modalità del carattere X, ovvero quando per ogni colonna si ha un solo valore $n \neq 0$:

Carattere X	Carattere Y				Totali di r
	y_1	y_2	y_3	y_4	
x_1	20	0	0	0	20
x_2	0	20	0	0	20
x_3	0	0	30	60	90
Totali di c	20	20	30	60	130

La **perfetta interdipendenza**, o se vogliamo la interdipendenza reciproca, può essere raggiunta solo nel caso di tabella quadrata, cioè con stesso numero di righe e colonne:

Carattere X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	25	0	0	25
x_2	0	0	30	30
x_3	0	45	0	45
Totali di c	25	45	30	100

e si ha quando: ad ogni modalità del carattere X corrisponde una e una sola modalità di Y e, concomitantemente, ad ogni modalità del carattere Y corrisponde una ed una sola modalità di X, ovvero quando per ogni riga e colonna si ha un solo valore $n \neq 0$.

Misure del legame associativo in distribuzione doppie di frequenza per caratteri qualitativi

In una distribuzione doppia di frequenza, una volta accertata l'assenza di indipendenza o di dipendenza perfetta tra i caratteri, l'ipotesi evidentemente non può che essere quella della presenza di un qualche livello di connessione tra i due suddetti estremi, che andrà necessariamente misurato.
Come già anticipato, gli **indici statistici** in grado di evidenziare l'indipendenza di un carattere statistico da un altro sono basati sul confronto (sulla distanza) tra le **frequenze osservate e quelle teoriche**, sotto l'ipotesi di indipendenza, e sono denominati **indici di connessione**. Tali indici assumono valori tanto più piccoli, quanto più esiste indipendenza tra i caratteri studiati.

Un indicatore in grado di misurare l'associazione tra due caratteri è dato dall'indice **chi-quadrato** χ^2, un indice assoluto la cui espressione analitica è:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(n_{ij} - n_{ij}' \right)^2}{n_{ij}'}$$

La differenza $(n_{ij} - n_{ij}')$ tra la frequenza osservata e la frequenza teorica è denominata **contingenza**.

Il χ^2 è sempre non negativo, ovvero assume valori sempre maggiori o uguali a zero. Ammette il **valore minimo 0** se $\mathbf{n_{ij} = n_{ij}'}$, ossia se esiste indipendenza tra i caratteri , e risulta tanto più grande quanto più ci si allontana dalla situazione di dipendenza. A parità di associazione l'indice aumenta al crescere di **n**.

Più opportuno, per la misura del legame associativo, è l'**indice normalizzato** chiamato V di **Cramer** dato da:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \times \min[(r-1);(c-1)]}}$$

Dove **n x min[(r-1);(c-1)]** sta a significare che il totale delle osservazioni **n** va moltiplicato per il valore più piccolo tra **r**, numero delle righe, e **c**, numero delle colonne detratto 1.
Tale indice varia tra **0**, nel caso di indipendenza, e **1**, nel caso di massima dipendenza.

Poiché **chi-quadrato** χ^2 e **V** di **Cramer** dipendono dalla distribuzione di frequenze e non dalle modalità, ne consegue che tali indici sono gli unici utilizzabili per misurare l'associazione tra due caratteri qualitativi sconnessi.

Esempio di calcolo dell'indice chi-quadrato e dell'indice normalizzato di Cramer.

Data la tabella di frequenze osservate

Caratt X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	2	5	15	22
x_2	4	14	10	28
x_3	7	6	12	25
Totali di c	13	25	37	75

Sulla base dell'uguaglianza $n_{ij}' = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n}$ si procede alla costruzione di una nuova tabella dove, fermi restando i valori delle righe e colonne marginali, al posto delle frequenze congiunte osservate si sostituiscono le frequenze congiunte teoriche nell'ipotesi di indipendenza dei due caratteri.

Caratt X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	22*13/75	22*25/75	22*37/75	22
x_2	28*13/75	28*25/75	28*37/75	28
x_3	25*13/75	25*25/75	25*37/75	25
Totali di c	13	25	37	75

Caratt X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	3,813	7,333	10,853	22
x_2	4,853	9,333	13,813	28
x_3	4,333	8,333	12,333	25
Totali di c	13	25	37	75

Si prosegue poi con l'elaborazione della tabella delle contingenze ($n_{ij} - n_{ij}'$).

Carattere X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	-1,813	-2,333	4,147	0
x_2	-0,853	4,667	-3,813	0
x_3	2,667	-2,333	-0,333	0
Totali di c	0	0	0	0

Ed infine tenuto conto dell'espressione $\frac{(n_{ij} - n_{ij}')^2}{n_{ij}'}$ si perviene al calcolo del chi-quadrato

Carattere X	Carattere Y			Totali di r
	y_1	y_2	y_3	
x_1	0,862	0,742	1,584	3,189
x_2	0,150	2,333	1,053	3,536
x_3	1,641	0,653	0,009	2,303
Totali di c	2,653	3,729	2,646	**9,028**

$$\chi^2 = \mathbf{9,028}$$

e quindi della V di Cramer:

$$V = \sqrt{\frac{\chi 2}{n \times \min[(r-1);(c-1)]}} = \sqrt{\frac{9,028}{75 \times 2}} = \sqrt{0,060} = \mathbf{0,245}$$

Dal risultato di V si evince che tra i due caratteri vi è una bassa connessione .

Nel caso di una tabella quadrata con caratteri che presentano solo due modalità

	y_1	y_2	totali di r
x_1	a	b	a+b
x_2	c	d	c+d
totali di c	a+c	b+d	a+b+c+d

l'indice chi-quadrato e l'indice normalizzato di Cramer possono essere calcolati ricorrendo anche alle seguenti espressioni:

$$\chi^2 = \frac{(a \times d - b \times c)^2 \times n}{(a+b) \times (c+d) \times (a+c) \times (b+d)} \qquad V = \frac{(a \times d - b \times c)}{\sqrt{(a+b) \times (c+d) \times (a+c) \times (b+d)}}$$

Esempio dei diversi modi di calcolare l'indice Chi-quadro e l'indice normalizzato di Cramer.

Data la tabella di frequenze osservate

	y_1	y_2	TOT
x_1	17	9	26
x_2	11	15	26
TOT	28	24	52

$$n_{ij}' = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n}$$

y_1	y_2	TOT
14,000	12,000	26,000
14,000	12,000	26,000
28,000	24,000	52,000

$$\frac{\left(n_{ij} - n_{ij}' \right)^2}{n_{ij}'}$$

y_1	y_2	TOT
0,6429	0,7500	1,3929
0,6429	0,7500	1,3929
1,2857	1,5000	**2,7857**

χ^2 = $\sum\sum(Oss-Teo)^2/Teo$ = **2,786**

n x min tra (r-1);(c-1) = 52 x (2-1) = **52**

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{52}} = \sqrt{\frac{2,786}{52,000}} = \sqrt{0,0536} = \mathbf{0,231}$$

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	a+b+c+d

17	9	26
11	15	26
28	24	52

a x d = 255
b x c = 99

$$\chi^2 = \frac{(a \times d - b \times c)^2 \times n}{(a+b) \times (c+d) \times (a+c) \times (b+d)} = \frac{(255 - 99)^2 \times 52}{26 \times 26 \times 28 \times 24} = \frac{1.265.472}{454.272} = \mathbf{2,786}$$

$$V = \frac{(a \times d - b \times c)}{\sqrt{(a+b) \times (c+d) \times (a+c) \times (b+d)}} = \frac{(255 - 99)}{\sqrt{26 \times 26 \times 28 \times 24}} = \frac{156}{\sqrt{454.272}} = \mathbf{0,231}$$